



## C O N T E N T S

Chapter 1. 학률의 관점과 분할	
.....	P. 005-046
Chapter 2. 독립사건과 그 활용	
.....	P. 047-074
Chapter 3. 종속사건의 활용	
.....	P. 075-100
Chapter 4. 독립사건과 종속사건의 활용 고난도	
.....	P. 101-136

1

확률의 관점과 분할

## 0. 합의 법칙과 곱의 법칙

합의 법칙과 곱의 법칙은

확률과 통계 교과에서 학습하는 내용이 아니라 고등수학에서 다루는 내용이다.

그러나 확률과 통계 확률 단원에서 다루는

확률의 덧셈정리와 곱셈정리, 독립사건과 종속사건의 활용에서 매우 중요하므로

공부를 시작하기에 앞서 짚어보지 않을 수가 없다.

교과서에 서술된 각 법칙은 다음과 같다.

### <합의 법칙>

두 사건  $A, B$ 가 동시에 일어나지 않을 때,  
사건  $A, B$ 가 일어나는 경우의 수를 각각  $m, n$ 이라고 하면  
사건  $A$  또는 사건  $B$ 가 일어나는 경우의 수는  $m+n$ 이다.

### <곱의 법칙>

사건  $A$ 가 일어나는 경우의 수가  $m$ ,  
그 각각의 경우에서 사건  $B$ 가 일어나는 경우의 수가  $n$ 일 때,  
두 사건  $A, B$ 가 잇달아 일어나는 경우의 수는  $m \times n$ 이다.

이렇게 교과서를 읽어보면, 상식적 수준에서 너무 당연하게 느껴진다.

그러나 내용이 진행될 수록

모든 확률과 통계 교과 전반에 영향력이 커지는 법칙인만큼  
조금 더 뜯어볼 필요가 있다.

일단 선택의 기로에서 우리는 다음과 같은 두 가지 판단을 해야 한다.

이 선택이 앞으로의 선택에 미치는 영향력이 있는가?

나의 선택에 따른 앞으로의 선택의 구조가 대칭성(=구조적 동일성)을 갖는가?

예를 들어 티셔츠가 검은색, 흰색, 회색 한 벌씩 총 세 벌이 있고,  
바지가 흰 면바지, 베이지색 면바지, 검은색 면바지, 청바지 총 네 벌이 있다고 하자.

어떤 티셔츠를 선택해도 바지를 자유롭게 고르는 스타일이라면,  
전체 경우의 수는 곱의 법칙을 적용하여  $3 \times 4 = 12$ 가지이다.  
이 때 티셔츠의 선택은 앞으로의 선택에 미치는 영향력이 없었고,  
대칭성을 갖는 선택이었다고 볼 수 있다.

반면, 같은 색 상하의는 입지 않는 스타일이라면,  
검은색이나 흰색 티셔츠일 때 3가지,  
회색 티셔츠일 때 4가지를 합하여 총 10가지 이다.  
이 때 티셔츠의 선택은 앞으로의 선택에 영향을 미쳤고,  
대칭성을 갖지 않는 선택이었다고 본다.

즉,  
영향력이 있고, 대칭성이 없을 때는 합의 법칙  
영향력이 없고, 대칭성이 있을 때는 곱의 법칙  
이라고 할 수 있다.

## 1. 확률의 뜻

우선 확률에 대해 공부하기에 앞서,  
교과서가 설명하는 확률 관련 용어의 정의를 정리하자.

시행 - 같은 조건에서 여러 번 반복할 수 있고,  
그 결과가 우연에 의하여 결정되는 실험이나 관찰을 시행이라고 한다.

표본공간 - 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합

사건 - 표본공간의 부분집합

근원사건 - 표본공간의 부분집합 중에서 한 개의 원소로 이루어진 집합

확률 - 어떤 시행에서 표본공간  $S$ 가  $n$ 개의 근원사건들로 이루어져 있고,  
각 근원사건이 일어날 가능성이 같다고 할 때,

사건  $A$ 가  $r$ 개의 근원사건들로 이루어져 있으면 사건  $A$ 가 일어날 확률은

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{r}{n}$$

정리하면,

시행을 하면 일어날 수 있는 표본공간 속에서

우리는 근원사건이라는 단위를 기준으로

표본공간과 사건의 비율로서 확률을 구하게 된다.

## 2. 확률의 관점

확률의 정의 중 문제를 풀 때 가장 중요한 포인트는  
“각 근원사건이 일어날 가능성이 같다고 할 때”라는 가정인데,

이는 뒤집어 말하면  
일어날 가능성이 같은 근원사건만 설정하면,  
확률을 구하는 표본공간은 바뀔 수 있다는 뜻이다.

예를 들어 한 주사위를 두 번 던져서 나온 눈의 합이 3의 배수일 확률을 구할 때,  
 $6 \times 6 = 36$  개의 근원사건으로 이루어진 표본공간 대신  
1과 4와 같이 3으로 나눈 나머지가 같은 수들을 하나로 모아  
 $3 \times 3 = 9$  개의 근원사건으로 이루어진 표본공간으로 구할 수 있다.

물론 한 주사위를 두 번 던져서 나온 눈의 합이 4의 배수일 확률을 구할 때는  
 $6 \times 6 = 36$  개의 근원사건으로 이루어진 표본공간 대신  
1과 5와 같이 4로 나눈 나머지가 같은 수들을 하나로 모아  
 $4 \times 4 = 16$  개의 근원사건으로 이루어진 표본공간으로 구할 수 없다.

1과 5가 일어날 발생 빈도와 3이 일어날 발생 빈도가 다르기 때문이다.

이렇게 문제를 풀기 쉽게 해주는 근원사건을 설정하는 방법 중에  
시행의 관찰 시점을 바꿔보는 방법이 있다.

조를 짜는 경우의 수를 셀 때 학습한 내용과 비슷하다.

예를 들어 6명의 학생을 2명씩 3개의 조로 나누는 경우를 생각하자.

조를 짜주는 관리자의 입장이라면,

$\frac{{}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2}{3!}$ 와 같이 다소 복잡하게 구해야하지만,

조를 구성해야하는 당사자인 학생의 입장으로 보자면,  
자신과 같은 조를 할 학생을 고르는 경우의 수를 곱해,  
 ${}_5C_1 \cdot {}_3C_1$ 와 같이 간단하게 구할 수 있다.

확률에서도 마찬가지로인데,

확률을 구할 때도 등장인물이 여러 명이라면,  
가장 확률을 구하기 간단한 입장을 생각해서 근원사건을 설정한다.

보통

크기를 비교해야하는 문제라면 비교당하는 당사자가 되어,  
조를 짜는 상황이라면 조원 당사자가 되어  
선발하거나 선택하는 상황이라면 선발되거나 선택받는 개체가 되어

확률을 구하는 것이 쉽다.

또 조건이 주어진 주인공 역할의 개체의 선택만 결정하면  
아무 조건 없이 주어진 개체의 선택은 아예 구하지 않아도 되는 경우도 많다.

이 경우 당연히 표본공간은 작아진다.

모쪼록 전지적 작가의 시점보다는  
1인칭 주인공의 시점에서 문제를 풀어보도록 하자.

### 3. 조건부확률

앞서 선택의 영향력 여부가 합의 법칙과 곱의 법칙을 가르는 기준이라고 배웠다.

경우의 수를 구할 때 이런 합의 법칙과 곱의 법칙이 기본이 되는 것처럼  
확률을 구할 때 사건과 사건 사이의 영향력을 판단하는 것도 매우 중요한데

그 영향력을 관찰하기 위해 우리는 조건부확률을 공부한다.

$P(A|B)$ 과  $P(A|B^c)$ 의 대소 관계를 관찰하여  
서로 같으면 사건  $B$ 는 사건  $A$ 에게 영향력이 없고,  
서로 다르면 사건  $B$ 는 사건  $A$ 에게 영향력이 있다고 판단하는 것이다.

이를 독립사건과 종속사건이라고 부르며 뒤에서 더 자세하게 공부할 것인데,

지금은 그 조건부확률을 어떻게 구하는 지를 알아보자.

<조건부확률>

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

즉, 사건  $A$ 를 새로운 표본공간으로 보고 사건  $B$ 의 확률을 구하는 것이다.



#### 4. 확률의 곱셈정리

조건부확률의 식의 분모를 넘기면 확률의 곱셈정리를 얻을 수 있다.

<확률의 곱셈정리>

$P(A) > 0$ ,  $P(B) > 0$ 일 때, 사건  $A \cap B$ 가 일어날 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

간단한 이항으로 구할 수 있는 공식인 만큼 의미를 간과하기 쉽지만

**‘확률을 구할 때 우리는 사건을 분할할 수 있다.’**

라는 중요한 의미를 반드시 이해해야 한다.

즉,  $A \cap B$ 가 일어난다는 것은

일단 사건  $A$ 가 일어난 후 그 가정 하에 사건  $B$ 가 일어난다거나

반대로 사건  $B$ 가 일어난 후 그 가정 하에 사건  $A$ 가 일어난 것으로

우리는 단계를 구분하여

각각을 Divide and Conquer 전략으로 접근할 수 있다는 것이다.

## 예제 01

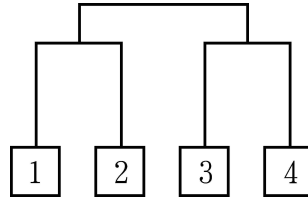
2005학년도  
예비 평가원 (나) 29

**Advice.**

사건을 분할하자.

## 확률의 곱셈정리

1. A, B, C, D 4명이 다음 그림과 같은 대진표에 따라 경기를 한다. 이들은 숫자 1, 2, 3, 4가 각각 한 개씩 적힌 카드가 들어있는 주머니에서 카드를 임의로 하나씩 꺼내어 나온 번호에 위치한다.



A가 C, D와 경기할 때 이길 확률이 모두  $\frac{2}{3}$  이고, B가 C,

D와 경기할 때 이길 확률이 모두  $\frac{1}{2}$  이라고 하자. 이 때, A와 B가 결승에서 만날 확률은? [4점]

①  $\frac{1}{2}$

②  $\frac{1}{3}$

③  $\frac{2}{3}$

④  $\frac{1}{6}$

⑤  $\frac{2}{9}$

**Advice.**

- (1) A와 B가 서로 떨어져 배치되고,
- (2) A가 C나 D를 이기고
- (3) B가 C나 D를 이겨야한다.

먼저 A와 B가 결승에서 만나려면 첫번째 대진에서 만나지 말아야  
하므로 A가 주머니에서 1이 적힌 카드를 꺼내면 B는 3 또는 4가 적  
힌 카드를 꺼내야 한다. A가 2, 3, 4가 적힌 카드를 꺼내는 경우도  
마찬가지이므로 첫번째 대진에서 만나지 않을 확률은  $\frac{16}{4!} = \frac{2}{3}$ 이다.

첫번째 대진에서 만나지 않았을 때, A가 결승에 진출할 확률이  $\frac{2}{3}$ ,

B가 결승에 진출할 확률이  $\frac{1}{2}$ 이므로 A, B가 모두 결승에 진출할 확률은  $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

따라서, A와 B가 결승에서 만날 확률은  $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$